Yaoundé, le 10 septembre 2021

Concours d'admission

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Série D Durée : **3 h**

Exercice 1 : 3,5 points

Soit f la fonction définie pour $x > \frac{1}{2}$, par : $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$

1. Démontrer que, pour tout $x > 1$, $f(x) > 1$. **0,5 pt**

On peut donc définir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On se propose dans la suite de l'exercice, d'exprimer u_n en fonction de n.

2. On considère les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \quad \text{et} \quad w_n = \ln(v_n).$$

a. Vérifier que v_n et w_n sont définies pour tout entier naturel n **0,5 pt**

b. Démontrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. On précisera la raison et le premier terme. **1 pt**

c. Exprimer, pour tout entier naturel n, w_n, puis v_n en fonction de n et en déduire que :

$$u_n = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. **1,5 pt**

Exercice 2 : 5 points

Le tableau suivant donne la superficie et le prix de dix appartements vendus récemment dans le centre d'une petite ville :

Superficie (en m^2) x_i	42	46	48	52	55	75	80	90	100	120
Prix (en milliers de francs) y_i	330	370	400	430	450	660	680	780	850	1050

1. Représenter, dans le plan rapporté à un repère orthogonal, le nuage de points $M_i(x_i;\ y_i)$ associé à cette série statistique. On adoptera les unités graphiques suivantes :
sur l'axe des abscisses : 1 cm pour 10 m^2 ;
sur l'axe des ordonnées : 1 cm pour 100000 francs. **1,5 pt**
2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points $M_i(x_i;\ y_i)$ et placer le dans le repère. **1 pt**
3. Montrer qu'une équation de la droite de régression de y en x est :
$y = 9{,}1086x - 44{,}89$. **1,5 pt**
4. a) Estimer le prix d'un appartement de 150 m^2. **0,5 pt**
b) Estimer (au mètre carré près) la surface d'un appartement coûtant 1600000 francs. **0,5 pt**

<u>Exercice 3</u> : 4 points

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

I- 1. On donne les points A, B et C d'affixes respectives $1+2i$, $-4+i$ et $2-3i$. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S de centre C qui transforme B en A. **1 pt**

2.a) Ecrire $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ sous forme exponentielle et en déduire la nature exacte du triangle ABC. **0,75 pt**

b) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABDC$ soit un carré. **0,5 pt**

II- On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'telle que : $z' = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)z + 4 - i$.

1. Donner la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques. **1 pt**
2. Déterminer l'image par f du cercle (C) d'équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0.$$ **0,75 pt**

<u>Exercice 4</u> : 7,5 points

Partie A

Soit φ la fonction numérique définie par sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$

1.a) Calculer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$. **0,5 pt**

b) Etudier le sens de variation de φ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$. **1 pt**

2. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une dans l'intervalle $[1; +\infty[$, qui sera notée α. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α. **1,5 pt**
3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$ et le présenter dans un tableau. **0,75 pt**

Partie B

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = (2x+1)e^{-x}$ et $g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sont notée $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$.

1. Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées $(0; 1)$ et admettent en ce point la même tangente. **1 pt**

2.a) Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\,\varphi(x)}{x^2+x+1}$ où φ est la fonction étudiée dans la partie A. **0,25 pt**

b) A l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$. **0,75 pt**

c) En déduire la position relative des courbes $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$. **0,5 pt**

3.a) Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (-2x-3)e^{-x} - \ln(x^2+x+1)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$. **0,5 pt**

b) En déduire l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unités d'aire de la portion du plan délimitée par les deux courbes $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$ et les droites d'équation $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 0$.

Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-4} près de cette aire. **0,75 pt**