Yaoundé, le 27 juillet 2021

Concours d'admission

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Série C
Durée : **3 h**

Exercice 1 : *(5,5 points)*

A/ On considère les équations différentielles $(E): y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$ et $(E'): y'' + 2y' + y = 0$.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E'). ***0,5pt***
2) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2e^{-x}$ est solution de (E). ***0,5pt***
3) a) Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - g$ est une solution de (E'). ***0,5pt***
   b) En déduire toutes les solutions de (E). ***0,5pt***
   c) Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f'(0) = 0$ et $f(0) = 1$. ***0,5pt***

B/ Une urne contient deux boules noires, trois boules rouges et cinq boules blanches. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne.

1) Déterminer la probabilité de tirer deux boules blanches. ***05pt***
2) On considère les événements A : « les boules tirées sont blanches ou rouges » et B : « les boules tirées sont blanches ». Calculer $P_A(B)$. ***0,75pt***
3) On inscrit sur chaque boule noire le chiffre 2, sur chaque boule rouge le chiffre -2 et sur chaque boule blanche le chiffre -1. Soit X la variable aléatoire égale à la somme algébrique des numéros obtenus.
   a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X. ***0,5pt***
   b) Déterminer la loi de probabilité de X. ***1,25pt***

Exercice 2 : *(4,5 points)*

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$. Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tel que : $31x^2 + 21y^2 + 10xy\sqrt{3} + (36\sqrt{3} - 16)x + (16\sqrt{3} + 36)y = 12$ et (Γ') son image par f.

1) a) Montrer que l'écriture complexe de f est $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$. ***0,5pt***
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f. ***0,5pt***
2) a) Exprimer x et y en fonction de x' et y'. ***0,5pt***
   b) Montrer qu'une équation cartésienne de (Γ') est $4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y = 3$. ***0,75pt***

c) Déterminer une équation réduite de (Γ') puis en déduire la nature et les éléments caractéristiques de (Γ'). *1pt*

d) En déduire la nature de (Γ). *0,25pt*

3) Soit M un point d'affixe z.

a) Démontrer que l'ensemble des points $M(z)$ tels que $z + \bar{z} - 6 = 0$ est la droite $(D): x = 3$. *0,5pt*

b) Montrer que la distance du point M à la droite (D) est $\frac{1}{2}|z + \bar{z} - 6|$. *0,5pt*

Problème : (10 *points*)

Partie A : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1) Déterminer la limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$. *0,5pt*
2) Étudier le sens des variations de g et dresser son tableau des variations. *1pt*
3) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions réelles dont l'une est 0 et l'autre noté α. *0,5pt*
4) Montrer que $-1{,}60 < \alpha < -1{,}59$. *0,5pt*

Partie B : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$ et (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. *0,5pt*
2) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe, puis étudier le sens des variations de f. *1pt*
3) Montrer que $f(\alpha) = \frac{-\alpha^2 - 2\alpha}{4}$. *0,5pt*
4) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. *0,5pt*
5) Dresser le tableau des variations de f. *0,5pt*
6) Étudier les branches infinies de la courbe de f. *0,5pt*
7) Tracer la courbe (C_f). *1pt*

Partie C : Soit m un réel strictement inférieur à α.

1) Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_\alpha^m f(x)dx$. *0,5pt*
2) Calculer $\int_\alpha^m xe^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties. *1pt*
3) En déduire $\int_\alpha^m f(x)dx$. *1pt*
4) Calculer la limite de $\int_\alpha^m f(x)dx$ lorsque m tend vers $-\infty$. *0,5pt*