Yaoundé, le 27 juillet 2021

Concours d'admission

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Série D
Durée : **3 h**

Exercice 1 : *(5 points)*

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique 2cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1 + i\sqrt{3}, z_B = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = 2$.

1) Placer les points A, B et C sur le repère. *0,75pt*
2) a) Calculer $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ et écrire le résultat sous forme exponentielle. *0,75pt*
   b) En déduire la nature du triangle ABC. *0,5pt*
3) a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z vérifiant $2(z+\bar{z}) + z\bar{z} = 0$. *1pt*
   b) Vérifier que les points A et B appartiennent à (Γ). *0,5pt*
4) On désigne par r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
   a) Déterminer les images des points A et B par r. *0,5pt*
   b) Déterminer l'écriture complexe de r. *0,5pt*
   c) Déterminer l'affixe du point C' image de C par r. *0,5pt*

Exercice 2 : *(4,5 points)*

On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n + 2n + 2 \end{cases}$

1) Calculer U_1 et U_2. *1pt*
2) On pose, pour tout entier naturel n, $U_n = an^2 + bn + c$. Déterminer les réels a, b et c. *0,75pt*
3) Pour tout entier naturel n, on définit la suite (V_n) par $V_n = U_{n+1} - U_n$.
   a) Exprimer V_n en fonction de n, puis en déduire la nature exacte de (V_n). *1pt*
   b) Exprimer en fonction de n, la somme $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$. *0,5pt*

c) Montrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = U_{n+1} - U_0$. ***0,75pt***

d) Exprimer U_n en fonction de n. ***0,5pt***

Problème : (10,5 *points*)

Partie A : On considère l'équation différentielle $(\boldsymbol{E})$: $\boldsymbol{xy' - y = 2xlnx}$ avec $x > 0$ dont l'inconnu y est une fonction de variable réelle x dérivable sur $]0; +\infty[$.

1) On pose $\boldsymbol{y = xg(x)}$ où g est une fonction de variable réelle x dérivable sur $]0; +\infty[$.
   a) Déterminer y' la dérivé de y. ***0,5pt***
   b) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{2}{x} lnx$. ***0,75pt***
   c) Trouver $g(x)$ et en déduire les solutions de (E). ***0,5pt +0,5pt***
2) Trouver la solution h de (E) telle que $h(1) = 0$. ***0,5pt***

Partie B : On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall\, x > 0,\ f(x) = x(lnx)^2 \end{cases}$.

1) En posant $x = t^2$ où $t > 0$,
   a) étudier la continuité de f en 0. ***0,5pt***
   b) étudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter le résultat. ***0,5pt + 0,25pt***
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(lnx)^2 + 2lnx \geq 0$. ***0,75pt***
3) Étudier les variations de f et dresser son tableau des variations. ***1,5pt***
4) Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis conclure. ***0,75pt***
5) Construire la courbe (C) de f dans un repère orthonormé (unité 2 cm). ***1pt***

Partie C : On pose $\boldsymbol{I(\alpha) = \int_\alpha^1 f(x)dx}$ avec $0 < \alpha < 1$.

1) Montrer que $\int_\alpha^1 xlnxdx = -\frac{1}{2}\alpha^2 ln\alpha - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\alpha^2$ en utilisant une intégration par parties. ***0,75pt***
2) Déterminer $I(\alpha)$ en utilisant une intégration par parties. ***0,75pt***
3) Calculer $\lim_{\alpha\to 0} I(\alpha)$. ***0,5pt***
4) Déterminer en cm^2, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. ***0,5pt***