Yaoundé, le 10 septembre 2021

Concours d'admission

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Série C Durée : **3 h**

Exercice 1 : 3,5 points

On a détecté des impuretés à l'intérieur et à l'extérieur des tuyaux cylindriques devant servir dans des installations sanitaires. Un travail a été effectué donnant le pourcentage y des impuretés à l'extérieur et le pourcentage x des impuretés à l'intérieur de 05 tuyaux pris comme échantillons. En voici les résultats :

Valeurs x_i de x (en %)	1,3	2,2	3,5	4,6	5,8
Valeurs y_i de y (en %)	1,6	2,08	2,6	3,1	3,4

Pour les résultats des calculs, on prendra les arrondis d'ordre 3.

1. Représenter le nuage de points associé à cette série statistique.
Un ajustement affine peut-il être justifié ? Justifier la réponse. **1,25 pt**

2.a) Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage. **0,5 pt**

b) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x. **1,25 pt**

3) En déduire le pourcentage des impuretés à l'intérieur d'un tuyau où le pourcentage des impuretés à l'extérieur est 4,8 %. **0,5 pt**

Exercice 2 : 3,5 points

L'espace affine $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct (O ;$\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$). On considère les points A$(-7,2,\ 2)$, B$(-3,1,1)$, C$(1,-1,-1)$ et le plan (P) dont une équation cartésienne est $x+2y+2z-1=0$.

1.a) Déterminer le vecteur $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. **0,5 pt**

b) Déduire que (A,B,C) est un repère affine d'un plan et déterminer une équation cartésienne de ce plan. **0,5 pt**

2. Déterminer une équation cartésienne de la sphère (Γ) de centre O, tangente au plan (P). **0,75 pt**

3. On note S la réflexion de plan (P).

a) Déterminer l'expression analytique de S. **1 pt**

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de (Γ') image de (Γ) par S. **0,75 pt**

Exercice 3 : 4,5 points

Dans le plan orienté P on considère un carré direct ABCD de côté 2cm et on note (Γ) l'ensemble des points M de P vérifiant : $2\|\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\|=\sqrt{3}d(M;(BC))$, où $d(M;(BC))$ désigne la distance du point M à la droite (BC).

I- 1. Déterminer deux réels a et b de sorte que D soit le barycentre des points pondérés (A,a), (B,b) et $(C,1)$. **0,5 pt**

2. a) Montrer que M appartient à (Γ) si et seulement si $DM=\frac{\sqrt{3}}{2}d(M;(BC))$. **0,5 pt**

b) Déduire la nature et trois éléments caractéristiques de (Γ). **0,75 pt**

II- Le plan orienté P est muni du repère orthonormé direct $\mathcal{R}=(A;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ où $\vec{\imath}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\jmath}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

1- a) Donner les coordonnées du point D et une équation cartésienne de la droite (BC) dans ce repère. **0,5 pt**

b) Montrer que l'équation réduite de (Γ) est : $\frac{(x+6)^2}{(4\sqrt{3})^2} + \frac{(y-2)^2}{(2\sqrt{3})^2} = 1.$ **1 pt**

2. Construire le carré ABCD, le repère $\mathcal{R}$ et l'ensemble (Γ) dans le repère $\mathcal{R}$. **1,25 pt**

<u>Exercice 4</u> : 2,5 points

Le personnel d'une grande entreprise est réparti en trois catégories : les ingénieurs de Génie Civil, les ouvriers (non ingénieurs de Génie Civil) et le personnel AT (administratifs ou techniques)

12 % des personnels sont des ingénieurs de Génie Civil et 71 % sont des ouvriers.

67 % des ingénieurs de Génie Civil sont des hommes et 92 % des ouvriers sont des femmes.

On donnera l'arrondie de tous les résultats à 10^{-4} près.

On interroge au hasard un membre du personnel de cette grande entreprise.

1. Quelle est la probabilité d'interroger une femme ouvrière ? **1 pt**

2. Quelle est la probabilité d'interroger une femme ingénieure de Génie Civil ? **0,5 pt**

3. On sait que 80 % du personnel est féminin. Calculer la probabilité d'interroger une femme AT.

En déduire la probabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel AT. **1 pt**

<u>Exercice 5</u> : 6 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O ;$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

I- Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\frac{x}{2}} + x - 3$, ($\mathcal{C}$) est sa courbe représentative dans le plan muni du repère (O ;$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

1. a) Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation. **1 pt**

   b) Déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. **0,25 pt**

2. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 3$ est une asymptote à la courbe (C) de f en $-\infty$ et étudier les branches infinies de (C) en $+\infty$. **0,5 pt**

3. On note f^{-1} la fonction réciproque de la fonction f, (C') la courbe de f^{-1} et (C_g) la courbe de la fonction g définie par $g(x) = f^{-1}(x-2) + 1$.

a) Comment obtient-on la courbe (C') à partir de la courbe (C) ? **0,25 pt**

b) Dire Comment on obtient la courbe (C_g) puis, construire les courbes (C), (C') et (C_g) dans le repère ci-dessus. **1,25 pt**

II- Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $U_n = \int_{-2}^{\sqrt{e}-2} (f^{-1}(x))^n dx$, $I_n = \int_0^1 t^n dt$ et $J_n = \int_0^1 t^n e^{\frac{t}{2}} dt$.

1. Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f^{-1}(\sqrt{e}-2)$ et $f^{-1}(-2)$. **0,5 pt**

2.. Justifier à l'aide du changement de variable $x = f(t)$ que

$$U_n = \int_0^1 t^n \left(\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} + 1\right) dt.$$ **0,25 pt**

3.a) Exprimer I_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$. **0,25 pt**

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier n,

$$J_{n+1} = 2\sqrt{e} - 2(n+1)J_n.$$ **0,5 pt**

c) Calculer J_0 et déduire U_2. **0,75 pt**

4. On note v le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe (O ;$\vec{\imath}$) du morceau de la courbe (C') de f^{-1} situé entre le point d'abscisse -2 et le point d'abscisse $\sqrt{e}-2$. Calculer v. **0,5 pt**