Yaoundé, le 22 mai 2021

Concours d'admission

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Série C
Durée : **3 h**

Exercice 1 : 4 points

I- Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article ; un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : Un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02. Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Montrer que la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux est égale à 0,0494. 0,75 pt

2. Une grande surface reçoit 800 articles de l'entreprise A. Soit X la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux.

a) Définir la loi de probabilité de X. 1 pt

b) Calculer l'espérance mathématique de X. Quel est le sens de ce nombre ? 0,75 pt

3.a) Un petit commerçant passe une commande de 25 articles à l'entreprise A. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait plus de 2 articles défectueux dans sa commande. 0,75 pt

b) Il veut que, sur sa commande, la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 50 %. Déterminer la valeur maximale du nombre n d'articles qu'il doit commander. 0,75 pt

Exercice 2 : 6,5 points

I- On donne un entier naturel n strictement positif et on considère l'équation différentielle (E_n) : $y' + y = \frac{x^n}{n!}e^x$.

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient pour tout réel x : $g(x) = h(x)e^{-x}$.

a) Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout réel x, $h'(x) = \frac{x^n}{n!}$. 0,75 pt

b) En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n), sachant que $h(0) = 0$. Quelle est alors la fonction g ? 0,75 pt

2. Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
a) Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation (F) : $y' + y = 0$. 0,5 pt
b) Résoudre (F). 0,5 pt
c) Déterminer la solution générale φ de l'équation (E_n). 0,5 pt
d) Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$. 0,5 pt
II- Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.
On admet que, pour tout réel x et tout entier $n \geq 1$: $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$.
Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.
1. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n). 1 pt
2. Pour tout entier naturel k non nul, Exprimer I_k en fonction de I_{k-1}. 0,5 pt
3. Calculer I_0 et déduire de ce qui précède que : $I_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-1}}{k!}$. 0,75 pt
4. En déduire la valeur de : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. 0,75 pt

<u>Exercice 3</u> : 5 points

I- Le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère l'application h qui, au point $M(x; y)$, associe le point $M'(x'; y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y \end{cases}$

1. Montrer que h est une similitude plane directe dont on précisera les éléments caractéristiques. 1 pt
2. On considère la courbe (C) admettant pour équation cartésienne dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$$x^2 + y^2 - 2xy + x - 3y = 0.$$

a) Déterminer l'équation cartésienne de la courbe (C') image de (C) par h. 1 pt
b) Donner la nature de (C') et préciser le foyer F', la directrice (D') et le sommet S'. 1 pt
c) En déduire une définition géométrique de la courbe (C). Préciser ses éléments caractéristiques, la construire dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. 2 pts

<u>Exercice 4</u> : 4,5 points

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :
$f(x) = x + 3 + \frac{1}{2}\sqrt{6x^2 + 24x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.
1.a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. 0,5 pt
b) Montrer que la courbe (C_f) admet deux asymptotes dont on déterminera les équations. 1 pt
2. Etudier la dérivabilité de f en -4 et en 0, puis interpréter les résultats obtenus sur la courbe(C_f). 1 pt
3. Etudier les variations de f, puis dresser le tableau de variation de f. 1 pt
4. Démontrer que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un seul point, puis calculer l'abscisse de ce point. 0,5 pt
5. Construire la courbe (C_f) 0,5 pt