Yaoundé, le 22 mai 2021

Concours d'admission

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES Série D

Durée : **3 h**

Exercice 1 : 5 points

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

I- On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme

$$P(z) = z^3 + (-7+5i)z^2 + (4-12i)z - 4 + 20i$$

1. Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une racine imaginaire pure z_0 **0,75 pt**
2. Déterminer le polynôme Q tel que : $P(z) = (z - z_0)Q(z)$ **0,5 pt**

3.a. En déduire les racines de l'équation $P(z) = 0$. On notera z_1 la racine dont la partie imaginaire est positive et z_2 l'autre racine **1,25 pt**

4. On nomme A, B et C les points d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2

a. Quel est la nature du triangle ABC (on justifiera la réponse) **0,5 pt**

b. Déterminer alors l'affixe du centre I du cercle passant par A, B et C **0,5 pt**

c. Construire ce cercle **0,5 pt**

II- On considère les points F et G d'affixes respectives $\frac{1-i}{2}$ et $1+i$

Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe du plan de centre O qui transforme F en G.

Préciser son rapport et son angle. **1 pt**

Exercice 2 : 5,5 points

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

1.a) Déterminer la dérivée f' de f et dresser le tableau de variation de f. **1,75 pt**

b) Etudier le signe de la dérivée seconde. **0,75 pt**

c) Démontrer que l'origine O du repère est un point d'inflexion pour la courbe (C_f). **0,5 pt**

2.a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I de $\mathbb{R}$ que l'on précisera. **0,5 pt**

b) Soit g la bijection réciproque de f et (C_g) sa courbe représentative.

Montrer que pour tout x de I, $g(x) = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. **0,5 pt**

3. Construire dans le même graphique les courbes (C_f) et (C_g). (On prendra 2 cm comme unité sur les axes de coordonnées) **1,5 pt**

Exercice 3 : **4,5 points**

Une urne contient 2 boules blanches numérotées 1 et 2 ; 3 boules rouges numérotées 1,2 et 3 toutes indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « les deux boules sont de même couleur ».

B : « les deux boules portent le même numéro ».

C : « On a tiré exactement une boule blanche et exactement une boule portant un numéro impair ». **3 pts**

2. Un joueur tire simultanément deux boules au hasard de cette urne. Il reçoit 500 FCFA par boule blanche tirée, 250 FCFA s'il tire la boule rouge portant le numéro 2 et perd 250 FCFA s'il tire la boule rouge portant le numéro 1. La boule rouge numéro 3 ne rapporte rien. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue d'une partie.

a) Donner la loi de probabilité de X. **1 pt**

b) Calculer l'espérance mathématique de X. Ce jeu vous semble-t-il avantageux pour le joueur ? Justifier votre réponse. **0,5 pt**

Exercice 4 : **5 points**

I- Pour tout entier naturel n, on considère

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{nx}{2}} sinxdx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{nx}{2}} cosxdx$$

1. En utilisant une intégration par parties, montrer que $2I_n + nJ_n = 2$ et montrer que $nI_n - 2J_n = -2e^{-\frac{n\pi}{4}}$ **1,5 pt**

2. Déduire de 1. Les expressions de I_n et J_n en fonction de n , pour tout entier naturel n . **1 pt**

3. Les suites (I_n) et (J_n) sont-elles convergentes ? **0,5 pt**

II- Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). On considère l'équation différentielle : $y''-4y'+13y=0$

1. Résoudre cette l'équation différentielle **1,25 pt**

2. Déterminer la solution de cette équation qui vérifie les deux conditions suivantes :

- la courbe représentant cette solution passe par le point $I(0;-1)$;
- la tangente en I à cette courbe a pour coefficient directeur (-1). **0,75 pt**